



Aalborg Universitet

**AALBORG UNIVERSITY**  
DENMARK

## **Aeroelasticidad de grandes turbinas eólicas de eje horizontal: un enfoque fundado en la dinámica de sistemas multicuerpo**

Gebhardt, Cristian; Preidikman, S.; Jørgensen, Martin Heide; Massa, J.C.

*Published in:*  
Mecánica Computacional

*Publication date:*  
2011

*Document Version*  
Early version, also known as pre-print

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*

Gebhardt, C., Preidikman, S., Jørgensen, M. H., & Massa, J. C. (2011). Aeroelasticidad de grandes turbinas eólicas de eje horizontal: un enfoque fundado en la dinámica de sistemas multicuerpo. *Mecánica Computacional*, 1187-1203. <http://www.amcaonline.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/3821/3743>

### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

## AEROELASTICIDAD DE GRANDES TURBINAS EÓLICAS DE EJE HORIZONTAL: UN ENFOQUE FUNDADO EN LA DINÁMICA DE SISTEMAS MULTICUERPO

Cristian G. Gebhardt<sup>a,c</sup>, Sergio Preidikman<sup>a,c</sup>, Martin H. Jørgensen<sup>b</sup> y Julio C. Massa<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina, cgebhardt@efn.uncor.edu, <http://www.efn.uncor.edu>*

<sup>b</sup> *Departement of Mechanical and Manufacturing Engineering, Aalborg University, 9220 Aalborg East, Denmark, <http://www.m-tech.aau.dk>*

<sup>c</sup> *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Av. Rivadavia 1917, 1033 Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina, <http://www.conicet.gov.ar>*

**Palabras clave:** Turbinas eólicas, sistemas multicuerpo, aerodinámica, aeroelasticidad.

**Resumen.** En este trabajo se presenta el desarrollo de un modelo estructural multicuerpo, que acoplado con un modelo aerodinámico, es utilizado para simular numéricamente el comportamiento aeroelástico no-lineal de grandes turbinas eólicas de eje horizontal. Diferentes configuraciones pueden ser estudiadas con el modelo desarrollado, y está destinado esencialmente a ser empleado como una herramienta de investigación para determinar la influencia de diversos factores. El modelo incluye: *i*) la torre portante, *ii*) la góndola, que contiene al generador eléctrico, a la electrónica de potencia y a los sistemas de control; *iii*) el cubo, donde las palas están ancladas y conectadas al eje rotante del generador; y *iv*) las tres palas, que extraen energía de la corriente de aire.

Las palas son consideradas flexibles, y sus ecuaciones de movimiento son discretizadas espacialmente por medio de elementos finitos de viga capaces de tener en cuenta las no-linealidades provenientes de la cinemática de grandes rotaciones y grandes desplazamientos. La torre también es considerada flexible, pero sus ecuaciones de movimiento son discretizadas por medio del método de modos asumidos. La góndola y el cubo son considerados rígidos y se representan mediante una formulación geométrica que permite tener en cuenta los efectos no-lineales provenientes de la cinemática.

Debido a la complejidad del sistema, la torre, la góndola y el cubo son modelados como una cadena cinemática, y cada pala es modelada separadamente. Además, se utilizan ecuaciones de vínculos para establecer la conexión entre las palas y el cubo. Por esto, las ecuaciones resultantes que gobiernan al sistema son del tipo diferenciales-algebraicas. Estas ecuaciones gobernantes son integradas de manera numérica e interactiva en el dominio del tiempo a través de un esquema predictor-corrector de cuarto orden.

Los resultados obtenidos en este trabajo ayudan a comprender el comportamiento aeroelástico de una gran turbina eólica de eje horizontal con tres palas, considerando: *i*) fuerzas aerodinámicas no-lineales e inestacionarias; *ii*) fuerzas gravitacionales; y, *iii*) las múltiples interacciones aerodinámicas-estructurales que caracterizan a los generadores eólicos de gran potencia y de eje horizontal.

## 1 INTRODUCCIÓN

Debido al creciente interés de obtener energía a partir de fuentes renovables, se están construyendo turbinas eólicas cada vez más grandes. Con ese objetivo, se han desarrollado diferentes enfoques para modelar grandes turbinas eólicas de eje horizontal. Petersen (1990) presentó un modelo para simular la respuesta dinámica de turbinas de eje horizontal, donde se introducen cargas locales de inercia deducidas a partir un análisis cinemático general. La turbina eólica es subdividida en tres subestructuras: la torre, la góndola, y el rotor de palas, donde cada subestructura es discretizada mediante el método de elementos finitos. Lee *et al.* (2002) desarrollaron una metodología en la cual se representa a la turbina eólica como un sistema multicuerpo, con subsistemas rígidos, como la góndola y el cubo, y subsistemas flexibles, como la torre y las palas. Los cuerpos rígidos son modelados mediante el método de Kane (Kane y Wang, 1965) y los cuerpos flexibles son modelados mediante elementos finitos de viga no-lineales. Jonkman y Buhl (2005) desarrollaron el código aeroelástico FAST. El modelo estructural del código combina técnicas del análisis modal y de la dinámica de sistemas multicuerpo. Las palas y la torre, son caracterizadas utilizando una representación modal lineal mientras que el resto de los componentes son modelados como cuerpos rígidos. Partiendo del trabajo de Maißer (1991), Zhao *et al.* (2007) desarrollaron una metodología basada en un sistema híbrido multicuerpo compuesto de cuerpos rígidos, cuerpos flexibles y juntas. Con un elemento cardánico elástico equivalente a una viga, los cuerpos flexibles son modelados como conjuntos de cuerpos rígidos con uniones flexibles, y la turbina eólica completa es representada por un número discreto de cuerpos rígidos, resortes y amortiguadores. Un modelo muy detallado del rotor de palas fue desarrollado por Kallesøe (2007), quien propuso una extensión de las ecuaciones diferenciales parciales de movimiento, para un modelo de palas, desarrolladas por Hodges y Dowell (1974), incluyendo los efectos de la gravedad, el ángulo de actitud y las variaciones de la velocidad del rotor. Estas ecuaciones de movimiento son aproximadas usando el método de modos asumidos. Holm-Jørgensen *et al.*, (2008) presentaron el desarrollo de un modelo estructural de una turbina eólica de orden reducido basado en la formulación co-rotacional y no-lineal de elementos finitos de viga. Este abordaje está fundado en una metodología propuesta por Krenk. La metodología fue inicialmente publicada en una nota técnica (Krenk, 2005), y luego fue publicada definitivamente en la literatura (Krenk, 2009).

En este artículo se presenta un modelo aeroelástico de una gran turbina eólica de eje horizontal con tres palas, ver Figura 1, el cual ha sido desarrollado siguiendo la metodología propuesta por Preidikman *et al.*, (2010).

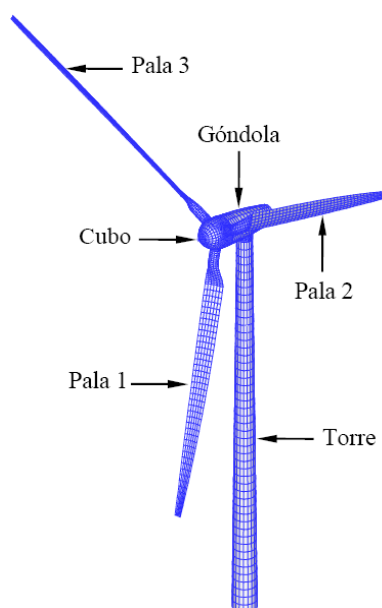


Figura 1: Turbina eólica de eje horizontal con tres palas.

## 2 MODELO ESTRUCTURAL

En este trabajo se presenta un modelo estructural de orden reducido de una gran turbina eólica de eje horizontal con tres palas, ver [Figura 1](#). Las palas son modeladas como flexibles y son discretizadas con elementos finitos de viga capaces de tener en cuenta las no-linealidades provenientes de la cinemática de grandes rotaciones y grandes desplazamientos. La torre también es modelada como flexible, pero es discretizada mediante el método de modos asumidos. La góndola y el cubo son considerados rígidos y son representados mediante una formulación geométrica que permite tener en cuenta los efectos no-lineales provenientes de la cinemática.

### 2.1 La torre, la góndola y el cubo

Se considera que la torre, la góndola y el cubo son eslabones de una única cadena cinemática. La posición y la orientación de una sección transversal de la torre se describen de manera absoluta respecto del suelo, la posición y la orientación de la góndola se describen de manera relativa respecto de la torre, y la posición y la orientación del cubo se describen de manera relativa respecto de la góndola.

La torre se modela como una viga recta con simetría axial, ahusada, elástica lineal y no amortiguada que en el extremo inferior está rígidamente empotrada al suelo y que en su extremo superior se encuentra sujeta la góndola. En el modelo, se permite a la torre flexionarse hacia adelante y atrás, de lado a lado y torsionarse respecto de su eje axial.

Para obtener un modelo de la torre con una cantidad finita y reducida de grados de libertad se utiliza el método de modos asumidos. Este método es un procedimiento para discretizar sistemas continuos con parámetros distribuidos antes de derivar las ecuaciones de movimiento ([Meirovitch, 1980](#)). Esta técnica viene acompañada con la hipótesis de que los campos de desplazamiento/rotación pueden ser aproximados como una suma de productos de funciones espaciales y temporales ([Kane et al., 1987](#)).

En la presente formulación, se considera un modo asumido para la flexión hacia adelante y atrás, un modo asumido para la flexión lado a lado y un modo asumido para la torsión. Esto representa un total de tres grados de libertad para toda la torre.

La góndola se modela como un cuerpo rígido y se considera que ésta puede rotar relativamente respecto de la torre en un ángulo de guiñada. Este movimiento es comandado por el sistema de control y se representa por el ángulo  $\phi$ , ver [Figura 2a](#).

El cubo se modela como un cuerpo rígido y se considera que éste puede rotar libre y relativamente respecto de la góndola en un ángulo de azimuth. Este movimiento se representa por el ángulo  $\psi$ , ver [Figura 2b](#).

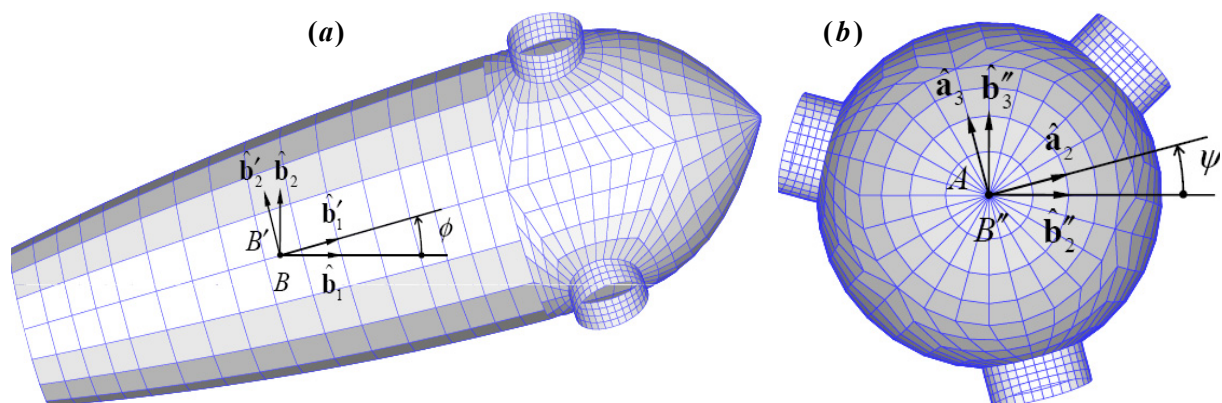


Figura 2: a) Vista de la góndola indicando el ángulo de guiñada  $\phi$ , b) Vista del cubo indicando el ángulo de azimuth  $\psi$ .

Las ecuaciones de movimiento para la cadena cinemática formada por la torre, la góndola y el cubo pueden expresarse en la forma

$$[\mathbf{M}_{tgc}] \{\ddot{\mathbf{q}}_{tgc}\} + [\mathbf{K}_{tgc}] \{\mathbf{q}_{tgc}\} = \{\mathbf{F}_{tgc}^g + \mathbf{F}_{tgc}^c + \mathbf{F}_{tgc}^v\}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{q}_{tgc}$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $\mathbf{M}_{tgc}$  es la matriz de masa,  $\mathbf{K}_{tgc}$  es la matriz de rigidez, que sólo tiene en cuenta la contribución elástica de la torre,  $\mathbf{F}_{tgc}^g$  es el vector de fuerzas generalizadas que tiene en cuenta las contribuciones provenientes del campo gravitacional, de los sistemas de control y del generador eléctrico,  $\mathbf{F}_{tgc}^c$  es el vector de fuerzas cinemáticas que tiene en cuenta los efectos centrífugos y de Coriolis sobre la góndola y el cubo, y  $\mathbf{F}_{tgc}^v$  es el vector de fuerzas de vínculo que se originan en las conexiones de las palas con el cubo y que puede determinarse como

$$\mathbf{F}_{tgc}^v = - \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{q}_{tgc}} \right]^T \{\lambda_i\}, \quad (2)$$

donde  $\Phi_i$  es el conjunto de ecuaciones de vínculo correspondiente a la  $i$ -ésima pala y  $\lambda_i$  es el vector de multiplicadores de Lagrange asociado (Nikraves, 1988; Shabana, 2010).

Notar que las cargas aerodinámicas están ausentes, esto se debe a que las cargas actúan sobre las palas y sus acciones sobre la cadena cinemática son transferidas implícitamente por medio de los multiplicadores de Lagrange.

## 2.2 Las palas

Cada pala se modela como una viga no prismática, elástica lineal y no amortiguada. Se consideran grandes desplazamientos y grandes rotaciones de la pala como un todo, y pequeños desplazamientos y pequeñas rotaciones por efecto de las deformaciones elásticas. Los movimientos de la pala como un todo se denominan *movimientos primarios* y los movimientos elásticos son considerados *movimientos secundarios*.

Para obtener un conjunto finito de ecuaciones diferenciales ordinarias, cada pala es representada por una cantidad finita de elementos de viga, los cuales se extienden a lo largo del eje elástico de la misma, ver Figura 3. Cada elemento posee dos nodos, uno por extremo, y cada nodo posee seis grados de libertad.

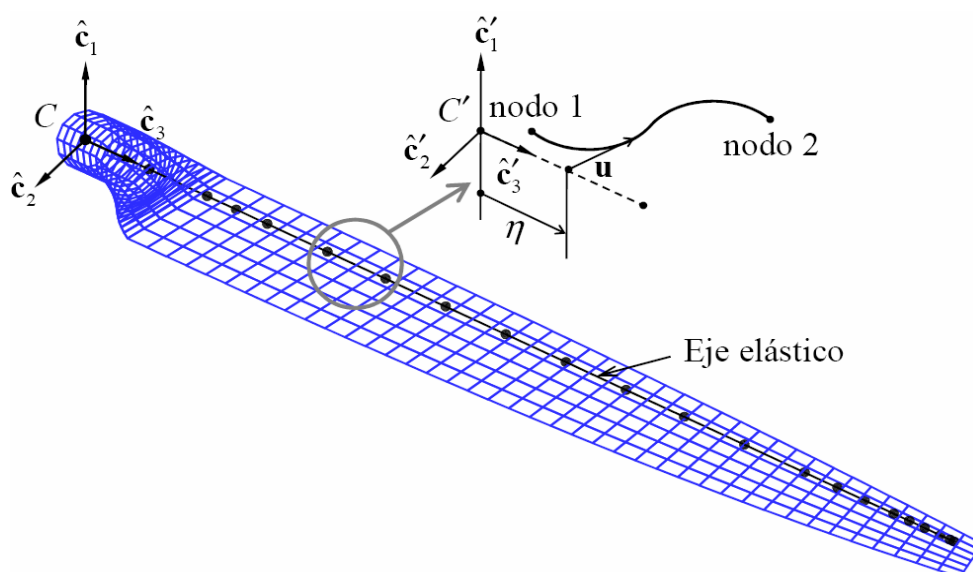


Figura 3: Representación estructural de la pala.

Los *movimientos primarios* representan la orientación y la posición de la pala como un cuerpo rígido y son iguales en todos los elementos de viga que conforman a la pala.

La orientación de un sistema de referencia  $C$  fijo a la sección transversal de la raíz de la pala (ver Figura 3) se describe por medio de un cuaternión unitario, o parámetros de Euler, (Betsch, 2006), es decir, cuatro coordenadas generalizadas restringidas a que la suma de sus cuadrados sea siempre igual a uno. En cambio, la posición del origen del sistema  $C$  se describe por medio de tres coordenadas generalizadas ortogonales entre sí.

Los *movimientos secundarios* representan el desplazamiento por deformación elástica. Como es bien sabido, la deformación elástica de un medio continuo es un problema de dimensión infinita gobernado por un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Para tratar el problema de la deformación elástica de la pala, se representa a la misma por una cantidad finita de elementos de viga que se extienden a lo largo del eje elástico. Como resultado de este procedimiento de discretización espacial se obtiene un sistema de dimensión finita gobernado por ecuaciones diferenciales ordinarias en el dominio del tiempo.

En el interior de cada elemento los campos de desplazamiento y giro son interpolados a partir de los valores nodales, utilizando como funciones de forma a los polinomios de Hermite de primer y tercer orden. Los de primer orden se utilizan para interpolar el desplazamiento axial y el giro alrededor del eje axial, y los de tercer orden se utilizan para interpolar los dos desplazamientos transversales por flexión ortogonales entre sí. Este tipo de discretización es tradicional en la modelación de estructuras por medio del método de elementos finitos (Reddy, 1984; Cook et al., 2001).

Adicionalmente se considera un agregado de rigidez de segundo orden, deducido a partir de la preservación de la longitud de arco del elemento de viga, que permite tener en cuenta los efectos de rigidización y ablandamiento producidos por la cinemática y la carga gravitacional.

Considerando la descripción cinemática elemental anteriormente expuesta, utilizando un procedimiento basado en las ecuaciones de Lagrange e introduciendo el agregado de segundo orden se obtienen las ecuaciones de movimiento para cada elemento. Posteriormente estas ecuaciones son ensambladas para obtener las ecuaciones de movimiento de la pala completa que pueden expresarse en la forma

$$[\mathbf{M}_1] \{\ddot{\mathbf{q}}_1\} + [\mathbf{A}_1] \{\ddot{\mathbf{p}}_1\} = \{\mathbf{F}_1^g + \mathbf{F}_1^c + \mathbf{F}_1^v\} \quad (3)$$

y

$$[\mathbf{m}_1] \{\ddot{\mathbf{p}}_1\} + [\mathbf{A}_1]^T \{\ddot{\mathbf{q}}_1\} + [\mathbf{k}_1] \{\mathbf{p}_1\} = \{\mathbf{f}_1^g + \mathbf{f}_1^c\}, \quad (4)$$

donde  $\mathbf{q}_1$  y  $\mathbf{p}_1$  son las coordenadas generalizadas que describen respectivamente a los *movimientos primarios* y *secundarios*, en este caso para la pala número uno,  $\mathbf{M}_1$  es la matriz de masa para *movimientos primarios*,  $\mathbf{A}_1$  es la matriz de masa que acopla a los *movimientos primarios* y *secundarios*,  $\mathbf{F}_1^g$  y  $\mathbf{F}_1^c$  son vectores que introducen fuerzas generalizadas y cinemáticas en las ecuaciones para los *movimientos primarios*,  $\mathbf{F}_1^v$  es el vector de fuerzas de vínculo debido al anclaje de la pala respecto del cubo, y que puede calcularse como

$$\mathbf{F}_1^v = \left[ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{q}_{1gc}} \right]^T \{\lambda_1\}, \quad (5)$$

$\mathbf{m}_1$  y  $\mathbf{k}_1$  son las matrices de masa y rigidez para *movimientos secundarios*, y finalmente,  $\mathbf{f}_1^g$  y  $\mathbf{f}_1^c$  son vectores que introducen fuerzas generalizadas y cinemáticas en las ecuaciones para los *movimientos secundarios*.

Notar que aquí sólo se presenta el tratamiento de la pala número uno, lo que se debe a que el tratamiento de las otras dos palas es idéntico.



En cada paso de tiempo, una vez evaluadas las matrices y los vectores correspondientes a las ecuaciones (3) y (4), se utiliza un esquema de proyección modal para reducir la dimensión del problema que involucra a los *movimientos secundarios*. Esto se hace para obtener un sistema con un número pequeño de grados de libertad.

### 2.3 Ecuaciones de vínculo

Las raíces de las palas se encuentran sujetas al cubo, y cada pala puede rotar respecto al cubo un ángulo denominado ángulo de actitud, que es comandado por el sistema de control.

Para establecer la vinculación entre cada pala y el cubo, se considera un sistema  $C^p$  pegado a la raíz de la pala y un sistema  $C^c$  pegado al cubo, ubicados donde se sujeta la pala al cubo, ver Figura 4. La posición y la orientación de de ambos sistemas respecto del sistema  $N$  fijo a tierra son coincidentes, pero la diferencia es que tanto la posición como la orientación son descriptas mediante dos conjuntos de coordenadas generalizadas diferentes.

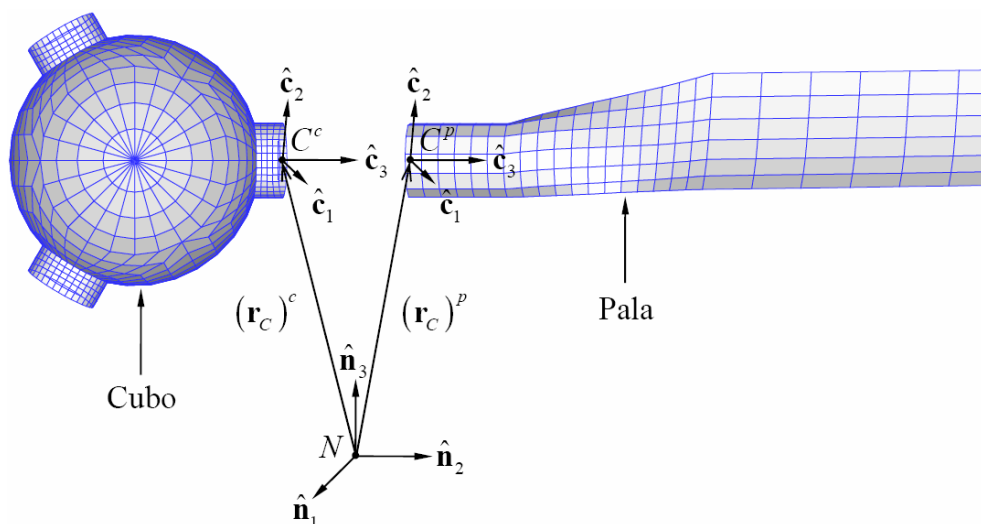


Figura 4: Vinculación entre el cubo y una pala.

Para especificar que la orientación de ambos sistemas permanece coincidente, se deben satisfacer tres condiciones: *i)* el primer elemento de la base de  $C^c$  debe ser perpendicular al segundo elemento de la base de  $C^p$ ; *ii)* el segundo elemento de la base de  $C^c$  debe ser perpendicular al tercer elemento de la base de  $C^p$ ; y, *iii)* el tercer elemento de la base de  $C^c$  debe ser perpendicular al primer elemento de la base de  $C^p$ .

Debido a que la orientación del sistema  $C^p$  se encuentra parametrizada por medio de un cuaternión, se necesita además incluir la condición que establece que su módulo debe permanecer unitario.

Para especificar que las posiciones de los orígenes  $(\mathbf{r}_c)$  de ambos sistemas deben permanecer coincidentes, se necesitan otras tres condiciones, las cuales establecen que la diferencia de las componentes de los vectores de posición de los orígenes de ambos sistemas debe ser nula.

Teniendo en cuenta estas siete ecuaciones de vínculo, se construyen tres conjuntos de ecuaciones, uno para cada pala. Cada conjunto contiene la información asociada al anclaje pala-cubo correspondiente, y que tiene la siguiente forma

$$\Phi_i = \{ \phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4 \quad \phi_5 \quad \phi_6 \quad \phi_7 \}_i^T, \quad \text{para } i=1,2,3. \quad (6)$$

## 2.4 Ecuaciones gobernantes

Las ecuaciones de movimiento correspondientes a cada uno de los miembros que componen la turbina eólica, es decir, la cadena cinemática torre-góndola-cubo y las palas uno, dos y tres, más los conjuntos de las ecuaciones de vínculo, que establecen los tres anclajes pala-cubo, conforman las ecuaciones que gobiernan al sistema. Estas ecuaciones son diferenciales-algebraicas, ya que las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo y las ecuaciones de vínculo son ecuaciones algebraicas.

Para resolver las ecuaciones gobernantes por medio de un esquema de integración para ecuaciones diferenciales ordinarias, en este caso el método modificado de Hamming de cuarto orden (Carnahan *et al.*, 1969; Predikman, 1998), se requiere derivar las ecuaciones de vínculo dos veces respecto del tiempo. De esta manera las ecuaciones que gobiernan al sistema pueden expresarse como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ -\dot{\mathbf{B}}\mathbf{x} \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tgc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1^T & \mathbf{m}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T & \mathbf{m}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_3^T & \mathbf{m}_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

es la matriz de masa del sistema,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{q}_{tgc}} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{q}_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{q}_{tgc}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{q}_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial \mathbf{q}_{tgc}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \mathbf{q}_3} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (9)$$

es la matriz jacobiana asociada a las ecuaciones de vínculo,

$$\mathbf{x} = \left\{ \mathbf{q}_{tgc} \quad \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{q}_3 \quad \mathbf{p}_3 \right\}^T \quad (10)$$

es el vector de coordenadas generalizadas del sistema,

$$\lambda = \left\{ \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \right\}^T \quad (11)$$

es el vector de multiplicadores de Lagrange y



$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{K}_{tgc} \mathbf{q}_{tgc} + \mathbf{F}_{tgc}^g + \mathbf{F}_{tgc}^c \\ \mathbf{F}_1^g + \mathbf{F}_1^c \\ -\mathbf{k}_1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{f}_1^g + \mathbf{f}_1^c \\ \mathbf{F}_2^g + \mathbf{F}_2^c \\ -\mathbf{k}_2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{f}_2^g + \mathbf{f}_2^c \\ \mathbf{F}_3^g + \mathbf{F}_3^c \\ -\mathbf{k}_3 \mathbf{p}_3 + \mathbf{f}_3^g + \mathbf{f}_3^c \end{array} \right\} \quad (12)$$

es el vector de fuerzas que tiene en cuenta todas las contribuciones anteriormente mencionadas.

Cuando las ecuaciones diferenciales-algebraicas que gobiernan a un sistema mecánico son expresadas de la forma aquí presentada, suelen surgir ciertos problemas de estabilidad los cuales se deben a que las ecuaciones de vínculo, que son realmente algebraicas, fueron derivadas dos veces respecto del tiempo. Estos problemas de estabilidad pueden suprimirse fácilmente al implementar el esquema de estabilización propuesto por [Baumgarte \(1972\)](#).

### 3 MODELO AERODINÁMICO

Cuando un cuerpo está inmerso en una corriente de fluido y el número de Reynolds es grande, los efectos viscosos puede ser confinados a regiones que circundan a la superficie del sólido; estas regiones, dominadas por vorticidad son llamadas capas límite. Parte de la vorticidad contenida en una capa límite puede ser derramada aguas abajo en el campo exterior del fluido, donde la vorticidad sólo puede ser transportada, pero no puede ser ni creada ni destruida. Esta vorticidad transportada forma la estela detrás del cuerpo.

El espesor de las capas límite y de las estelas tienden a cero cuando el número de Reynolds tiende a infinito. Bajo esta condición, las capas límite y las estelas pueden ser representadas por sábanas continuas de vorticidad adheridas y libres, respectivamente.

En el método de red de vórtices inestacionario, las sabanas continuas de vorticidad adherida son discretizadas por redes formadas por segmentos vorticosos finitos y rectos de circulación constante. Estos segmentos dividen a la superficie del cuerpo en una cantidad finita de elementos de área. El modelo se completa con la formación de la estela discreta a través de segmentos emitidos desde ciertos bordes filosos donde se produce la separación. En el presente estudio los bordes de separación son el borde de fuga y la puntera de cada pala.

Cada elemento de área en la red es encerrado por un anillo formado por segmentos vorticosos. Para reducir la dimensión del problema, se considera que los segmentos que conforman el anillo poseen la misma circulación, es decir, un anillo de circulación constante. De esta manera la conservación espacial de la circulación es satisfecha de manera automática e idéntica. La circulación de cada anillo vorticoso es determinada a través de la versión discreta de la condición de no penetración, ya que el fluido no puede penetrar la superficie del sólido inmerso. Para esto se tienen en cuenta las contribuciones de la corriente libre, la presencia de las estelas y la velocidad de la superficie del sólido. En cada paso de tiempo, luego de determinar la circulación de los anillos, algunos segmentos son emitidos hacia el campo exterior de fluido y forman parte de las redes que aproximan a las sábanas vorticosas libres de las estelas.

En este trabajo se utiliza una versión extendida del método de red de vórtices inestacionario ([Gebhardt et al., 2010](#)), con el objeto de determinar la magnitud y evolución de las cargas aerodinámicas en el dominio del tiempo. Esta versión permite tener en cuenta la presencia de la torre y la existencia de la capa límite terrestre. La capacidad de tener en cuenta a estos dos fenómenos, representa un aspecto novel del modelo aerodinámico empleado.

#### 4 ESQUEMA DE INTEGRACIÓN

El sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que gobierna al sistema, tiene que ser re-escrito como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden ([Preidikman, 1998](#)), de esta manera su integración en el dominio del tiempo puede llevarse a cabo como se indica a continuación:

1. En  $t = 0$  las condiciones iniciales son conocidas.
2. En  $t = \Delta t$  la solución es predicha por medio del método explícito de Euler, y luego es corregida de manera iterativa por medio del método modificado de Euler.
3. En  $t = 2\Delta t$  la solución es predicha por medio del método de dos pasos de Adams-Bashforth, y luego es corregida de manera iterativa por medio del método de dos pasos de Adams-Moulton.
4. En  $t = 3\Delta t$  la solución es predicha por medio del método de tres pasos de Adams-Bashforth, y luego es corregida de manera iterativa por medio del método de tres pasos de Adams-Moulton.
5. En  $t = n\Delta t$ , con  $n \geq 4$  la solución es predicha y corregida por medio del método modificado de Hamming de cuarto orden ([Carnahan et al., 1969](#)).

Es importante aclarar que los valores correspondientes a los multiplicadores de Lagrange son obtenidos en cada paso de tiempo como parte de la solución.

Esta metodología de integración permite resolver problemas en los cuales hay términos de aceleración en ambos lados del sistema de ecuaciones. Esto es un requerimiento ya que las cargas aerodinámicas, que pertenecen al lado derecho, dependen de la aceleración, de la velocidad, de la posición y de la orientación de las palas, y la estimación de estas cargas debe ser realizada en múltiplos enteros del paso de tiempo. En general, el cálculo de las cargas aerodinámicas representa el costo mayor de simulación, y su evaluación en fracciones del paso de tiempo sería muy costosa.

#### 5 RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos con una herramienta computacional basada en el modelo desarrollado. Las simulaciones fueron realizadas para una gran turbina eólica de eje horizontal con tres palas de 45 m de largo y una torre de 68 m de altura. Esta turbina eólica se supone instalada en una zona rural con terreno plano y con una densidad de construcción muy baja. El modelo estructural tiene un total de trece grados de libertad: tres para la torre, uno para el rotor y tres más por cada pala.

En el presente esfuerzo, los casos de estudio están orientados a determinar la respuesta de la turbina eólica para diferentes velocidades de viento, manteniendo fijas a las configuraciones de ángulo de guiñada de la góndola y de ángulo de paso de las palas. Se consideran cinco velocidades de viento ( $v$ ): 10, 12.5, 15, 17.5 y 20 m/s, donde se investiga la respuesta de la torre, del rotor y de las palas. Es importante aclarar que los valores de velocidad del viento son de referencia para el modelo de la capa límite terrestre, ya que su perfil de velocidades varía en altura.

### 5.1 Respuesta de la torre y el rotor

En la [Figura 5](#) se grafica la velocidad angular del rotor como una función del ángulo de azimut para cinco velocidades de viento:  $v = 10, 12.5, 15, 17.5$  y  $20$  m/s. Se considera un arranque impulsivo donde la velocidad es nula para  $t < 0$  e igual a  $v$  para  $t > 0$ . Durante el transitorio, la velocidad angular del rotor crece rápidamente hasta alcanzar un valor de régimen estacionario. Esto se debe a la tasa de potencia producida por el generador eléctrico y el amortiguamiento aerodinámico. En el régimen estacionario, las velocidades angulares para los cinco casos graficados son 3.68, 5.35, 7.19, 9.13 y 11.2 RPM, respectivamente, y las potencias medias producidas son 0.30, 0.63, 1.14, 1.85 y 2.75 MW.

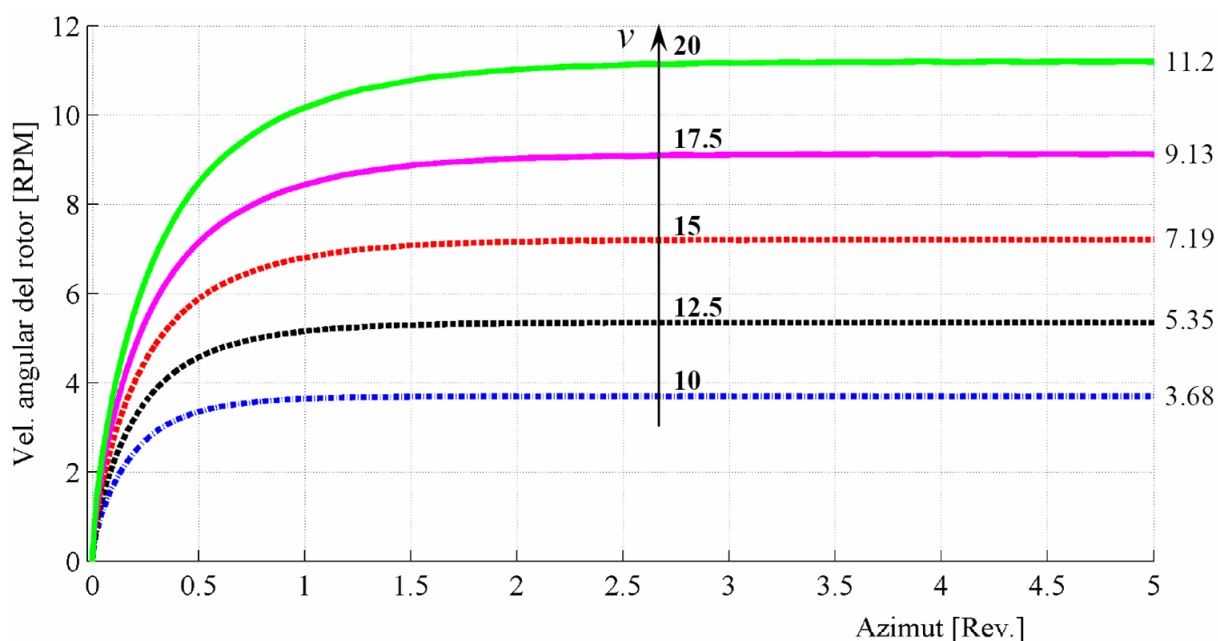


Figura 5: Velocidad angular del rotor para cinco velocidades del viento ( $v = 10, 12.5, 15, 17.5$  y  $20$  m/s).

En la [Figura 6](#) se grafica el desplazamiento hacia adelante y atrás del extremo superior de la torre para tres velocidades: 10, 15 y  $20$  m/s. Los resultados para las dos velocidades restantes, es decir,  $12.5$  y  $17.5$  m/s, han sido omitidos de aquí en adelante para hacer más sencillos los gráficos. Para las velocidades del viento bajas:  $10$  y  $15$  m/s, la torre se flexiona hacia adelante alcanzando valores medios aproximados de  $0.046$  y  $0.028$  m, respectivamente, a partir de los cuales la torre vibra con amplitudes pequeñas. Este comportamiento es dominado por las cargas gravitacionales debido a las grandes masas ubicadas por delante de la torre: el cubo, la góndola y las palas. Estas acciones predominan sobre las cargas aerodinámicas que empujan a la torre hacia atrás. En cambio para velocidades del viento más altas ( $20$  m/s), la torre se flexiona hacia atrás y luego retorna hacia adelante sobrepasando levemente de la posición libre de deformación ( $0.003$  m). A partir de esta posición la torre vibra con una amplitud considerable, la cual disminuye con el transcurso del tiempo debido al amortiguamiento aerodinámico. Al principio las cargas aerodinámicas predominan, pero después de algún tiempo las cargas gravitacionales ganan importancia. La reducción de amplitud de la vibración, se debe a la existencia de amortiguamiento aerodinámico, el cual está relacionado con el área barrida por el rotor, que es constante, y la velocidad del viento al cuadrado. Por lo tanto, la disipación es más importante a velocidades más altas, lo cual es válido siempre y cuando no cambie la naturaleza del amortiguamiento por efectos no-lineales.

En la **Figura 7** se grafica el desplazamiento de lado a lado del extremo superior de la torre. Para  $v = 10, 15$  y  $20$  m/s, la torre se flexiona hacia la izquierda (mirada de frente) alcanzando valores medios aproximados de  $0.010, 0.019$  y  $0.031$  m, respectivamente, con respecto los cuales la torre vibra con amplitudes que van creciendo con la velocidad del viento. Este comportamiento es debido a que el generador eléctrico produce un momento reactivo cuando extrae energía del rotor, el cual a su vez rota en sentido horario y produce más energía cuando la velocidad angular es más alta, siempre y cuando no se exceda la capacidad máxima de generación. El valor de la amplitud está relacionado con la velocidad de viento, ya que mientras más alta es la velocidad, más energía toma el sistema, y en la dirección de este movimiento, de lado a lado, el amortiguamiento aerodinámico es realmente bajo.

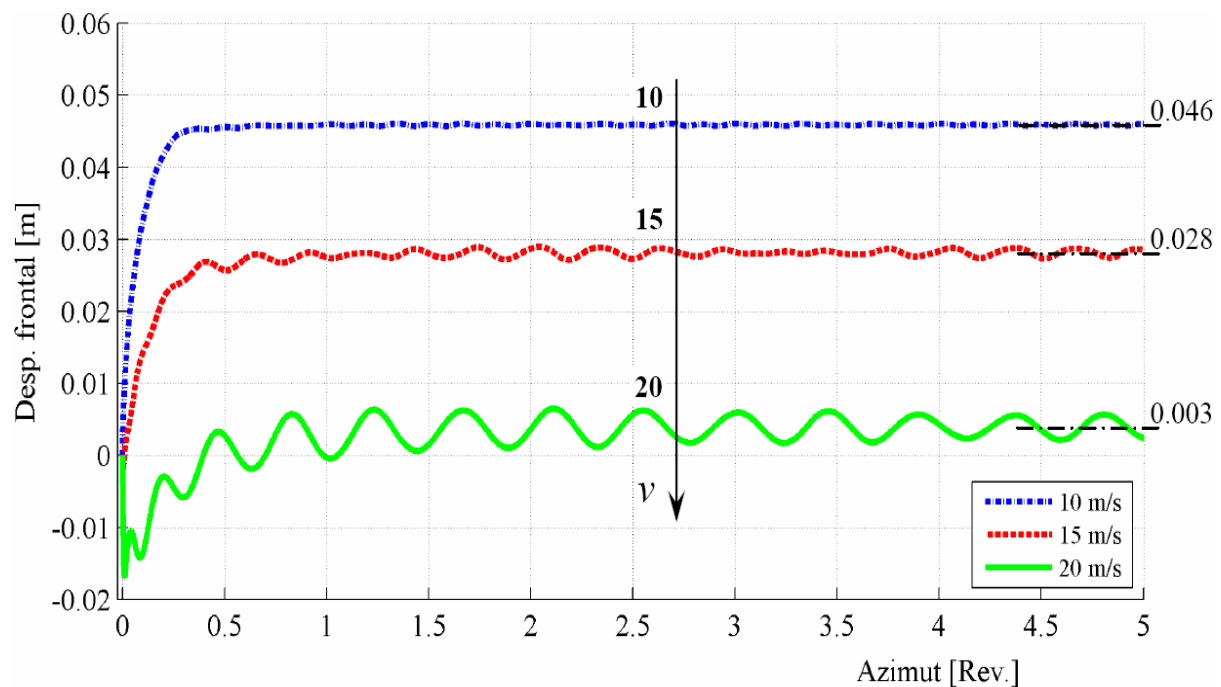


Figura 6: Desplazamiento hacia adelante y atrás de la torre para  $v = 10, 15$  y  $20$  m/s.

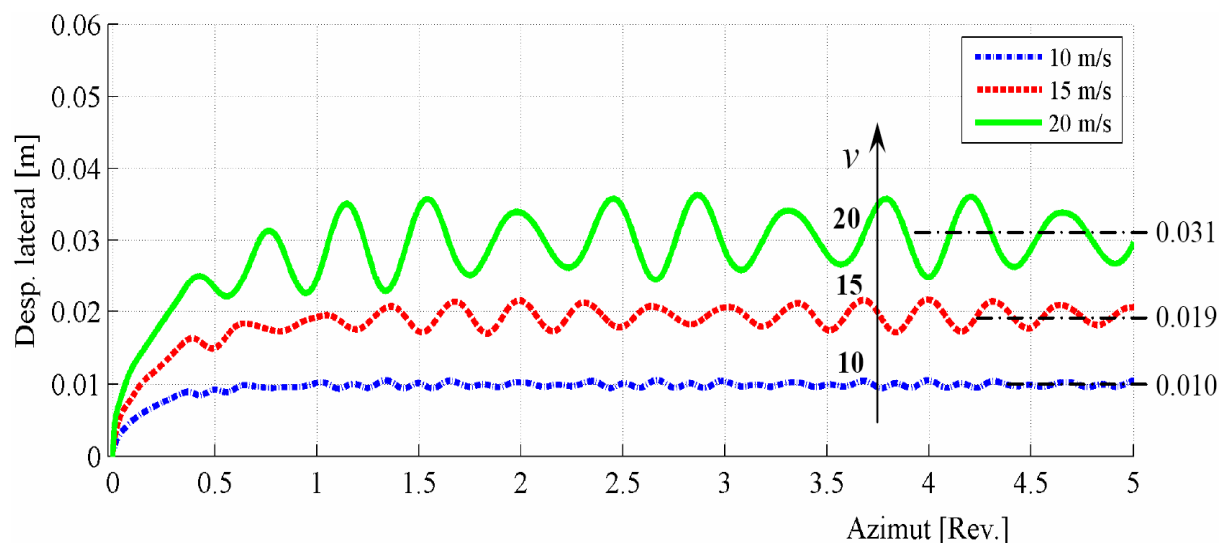


Figura 7: Desplazamiento lado a lado de la torre para  $v = 10, 15$  y  $20$  m/s.

En la **Figura 8** se graficaron los valores medios de los desplazamientos frontales del punto superior de la torre (hacia delante y hacia atrás) y los laterales (lado a lado). Los resultados obtenidos con la herramienta computacional son graficados con marcadores circulares para el desplazamiento frontal y cuadrados para el lateral, rotulados con la letra 's' de simulación. Además, en base a estos resultados se ajustaron curvas de tendencia graficadas con líneas continua y de trazo, rotuladas con la 't' de tendencia. Notar que los valores correspondientes a las velocidades 10, 15 y 20 m/s son los indicados a la derecha de los gráficos de las Figuras 6 y 7. El gráfico muestra nuevamente el comportamiento diferente entre los desplazamientos medios del extremo superior de la torre: mientras el desplazamiento lateral crece casi linealmente con la velocidad del viento, el desplazamiento frontal disminuye cuando aumenta la velocidad del viento.

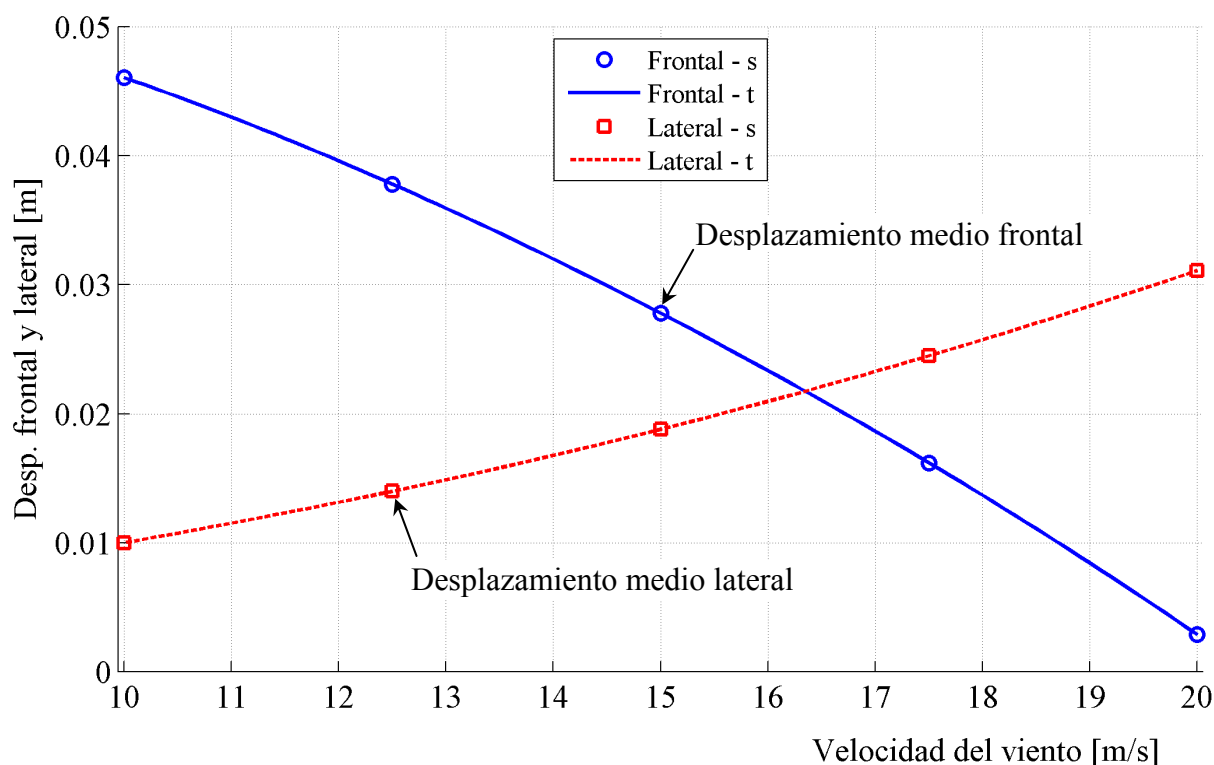
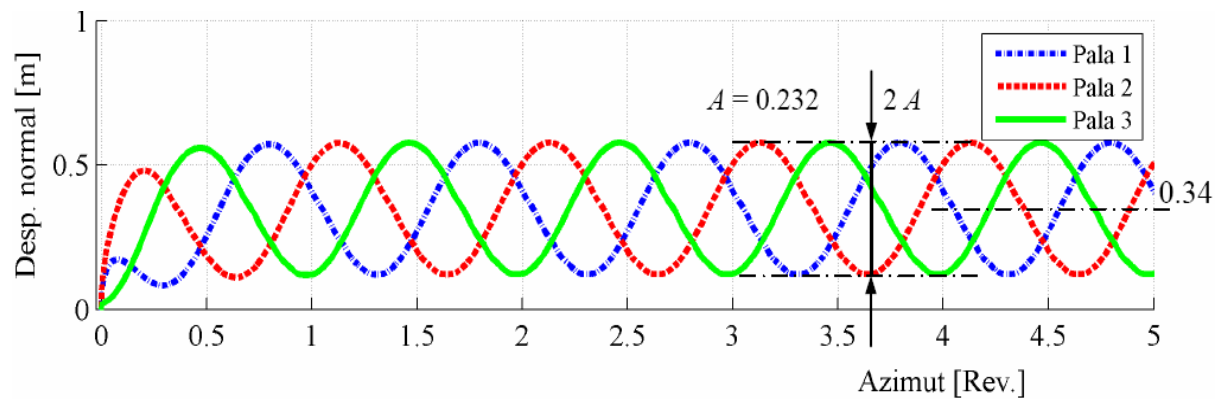
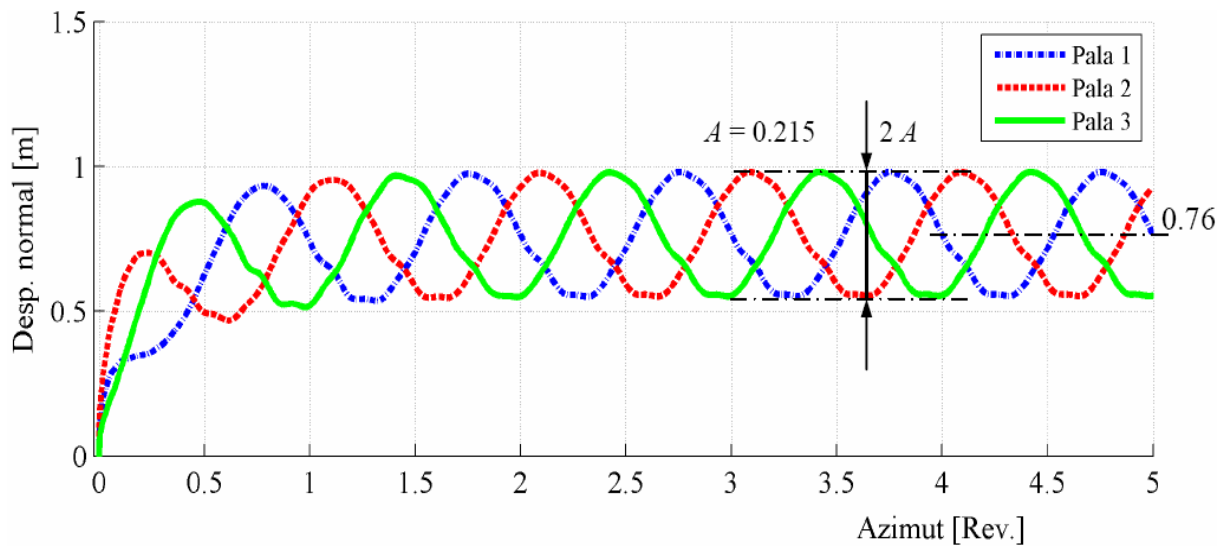
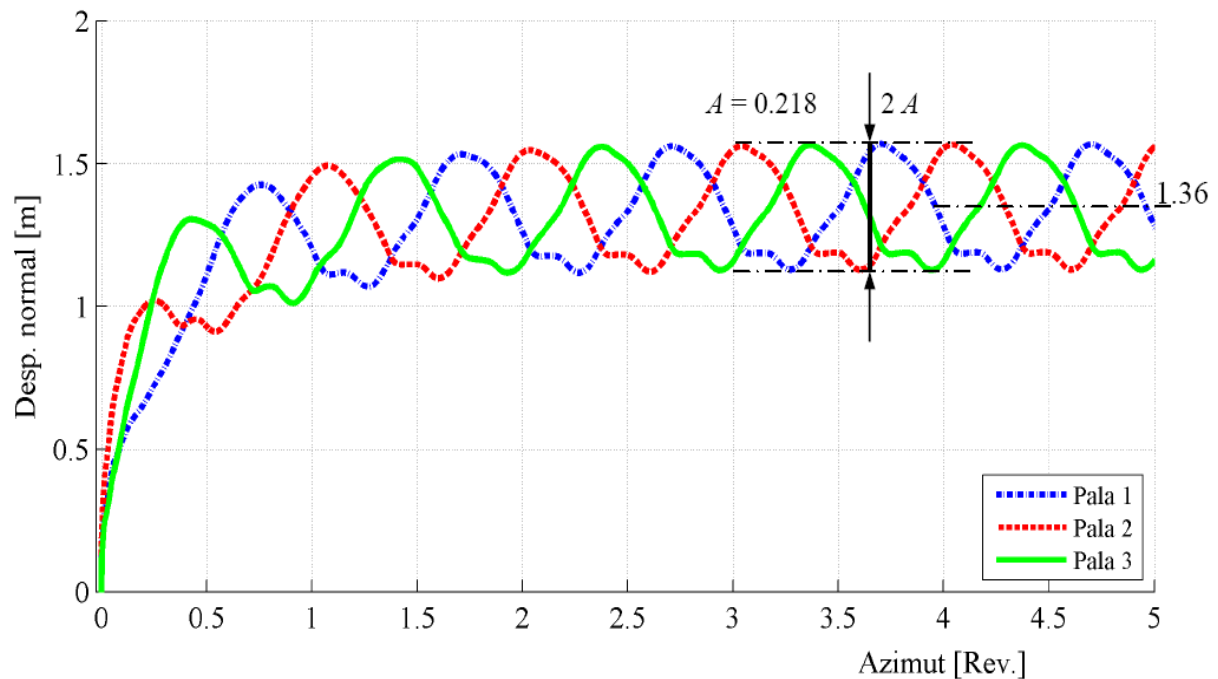


Figura 8: Desplazamientos medios del extremo superior de la torre en función de la velocidad del viento.

## 5.2 Respuesta de las palas

En las **Figuras 9, 10 y 11** se muestran gráficos de los desplazamientos de las punteras de las palas en la dirección normal a la cuerda extrema, es decir, la cuerda de referencia en la puntera de la pala. Para 10, 15 y 20 m/s las punteras de las palas se flexionan positivamente alcanzando valores medios aproximados de 0.34, 0.76 y 1.36 m, respectivamente, con respecto a los cuales vibran. El valor medio depende principalmente de las cargas aerodinámicas, que se incrementan con la velocidad del viento, pero la amplitud de las vibraciones ( $A$ ) varía poco con la velocidad del viento porque depende esencialmente de las cargas gravitacionales, aunque la forma de las ondas está influenciada levemente por las cargas aerodinámicas a medida que la velocidad de viento aumenta. Es importante aclarar y destacar que la respuesta de la pala dos posee un corrimiento de fase respecto de la respuesta de la pala uno igual a un tercio de revolución, lo mismo sucede entre las respuestas de las palas tres y dos, y lo mismo sucede entre las respuestas de las palas uno y tres. Este hecho muestra coherencia y concordancia de las respuestas obtenidas respecto de la disposición geométrica de las palas en el rotor.

Figura 9: Desplazamiento normal a la cuerda extrema para  $v = 10$  m/s.Figura 10: Desplazamiento normal a la cuerda extrema para  $v = 15$  m/s.Figura 11: Desplazamiento normal a la cuerda extrema para  $v = 20$  m/s.



En las Figuras 12, 13 y 14 se graficaron los desplazamientos de las punteras de las palas en la dirección tangencial a la cuerda extrema para  $v = 10, 15$  y  $20$  m/s. Las palas vibran en la dirección tangencial con una amplitud que en los tres casos es del orden de  $0.18$  m, mientras que el valor medio aumenta levemente a medida que velocidad de viento crece, pero está cercano a la posición neutra. Este comportamiento es debido a que las cargas gravitacionales predominan, por lo tanto, cuando las palas están subiendo o bajando, encuentran casi la misma distribución de carga pero con signo cambiado.

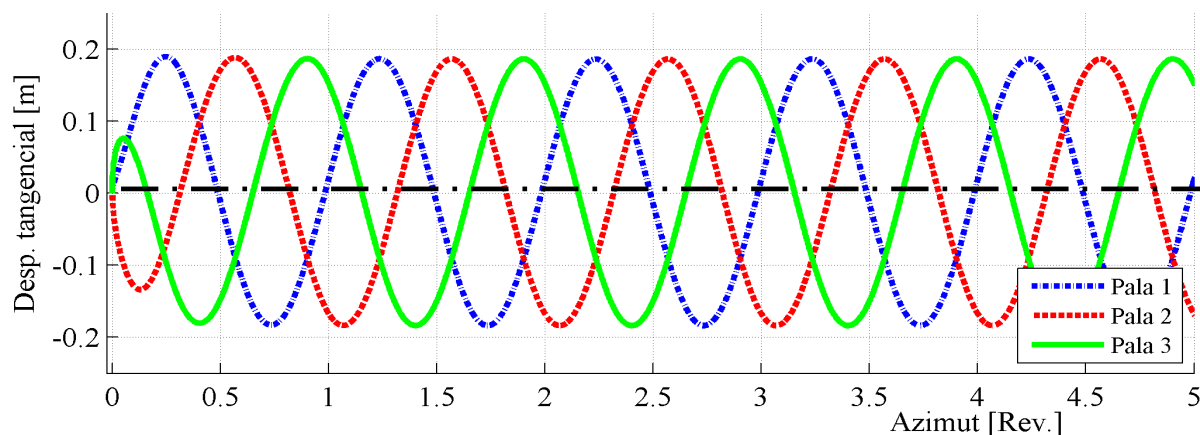


Figura 12: Desplazamiento tangencial a la cuerda extrema para  $v = 10$  m/s.

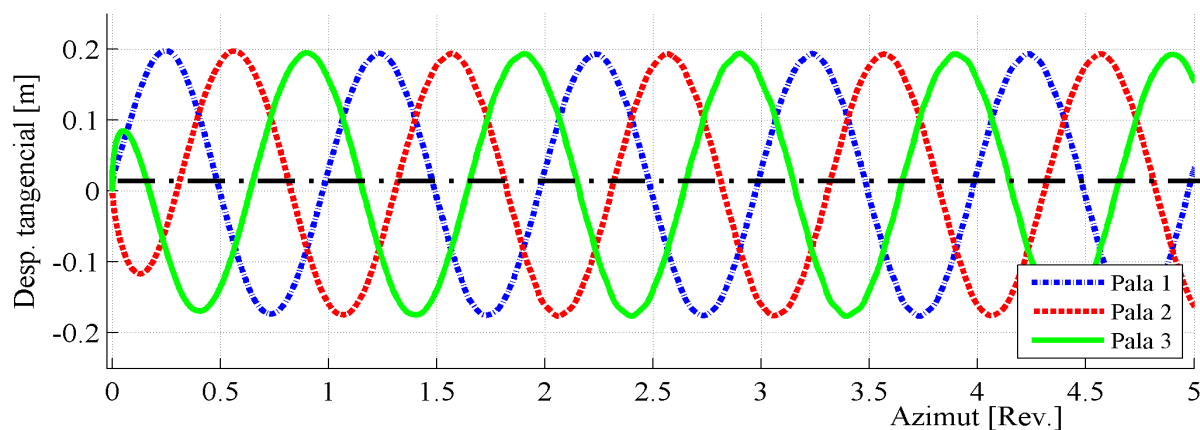


Figura 13: Desplazamiento tangencial a la cuerda extrema para  $v = 15$  m/s.

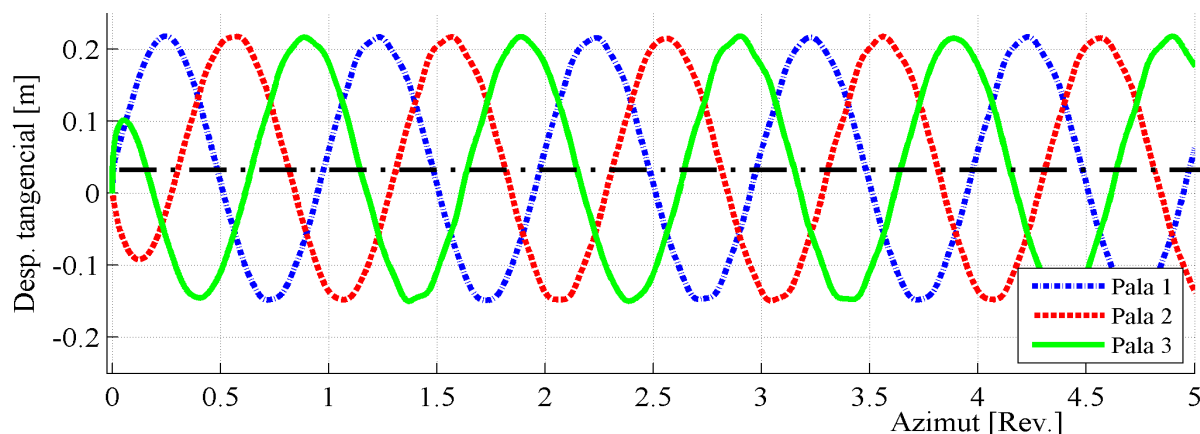


Figura 14: Desplazamiento tangencial a la cuerda extrema para  $v = 20$  m/s.

### 5.3 Velocidad angular y potencia producida

En la [Figura 15](#) se graficó la velocidad angular del rotor y la potencia producida, como funciones de la velocidad del viento,  $v$ . Es importante destacar que para facilitar la comparación entre el comportamiento de las dos variables, se graficó el valor de la potencia multiplicado por 4. Como ya se mencionó, se realizaron simulaciones numéricas para cinco velocidades de viento igualmente espaciadas entre 10 y 20 m/s.

Los resultados obtenidos con la herramienta computacional son graficados con marcadores circulares para la velocidad angular y cuadrados para la potencia producida, rotulados con la letra 's' de simulación. Además, en base a estos resultados se ajustaron curvas de tendencia graficadas con líneas continua y de trazo, rotuladas con la 't' de tendencia.

Se observa que la velocidad de rotación varía de manera casi lineal con la velocidad del viento, ya que en el rango de velocidades estudiado el comportamiento no-lineal es débil. En cambio, la potencia producida varía de manera no-lineal, siendo aproximadamente proporcional al cubo de la velocidad del viento. Para ilustrar este hecho, a modo de referencia se ha agregado la gráfica de la función  $0.00033 v^3$  multiplicada por 4.

Notar que el rango de velocidades de viento que se consideró es un rango normal de operación para una turbina del tamaño aquí utilizada. Los resultados obtenidos son coherentes con las tendencias predichas por teorías más simples utilizadas para el diseño en la industria de turbinas eólicas ([DNV-RISØ, 2009](#)).

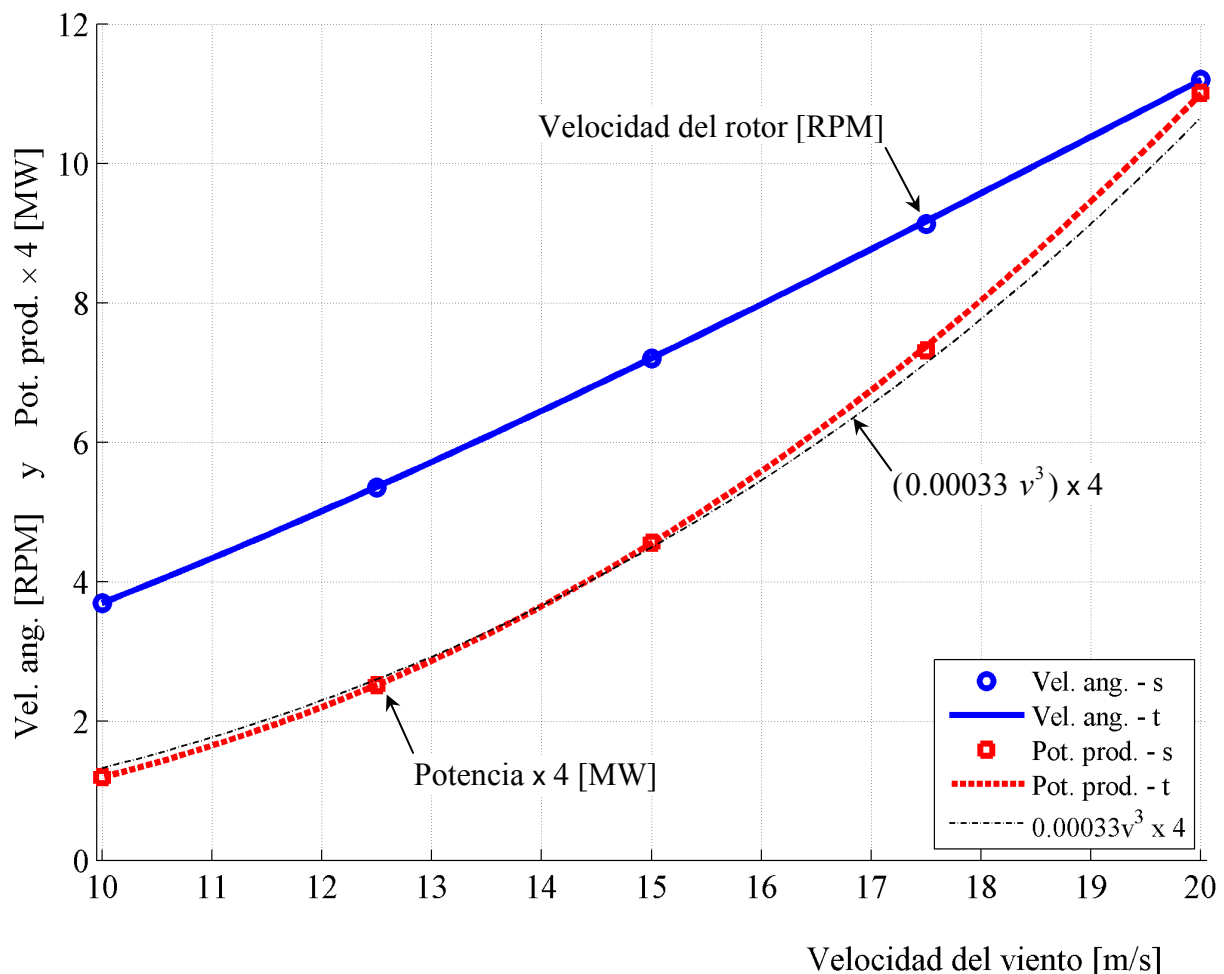


Figura 15: Velocidad angular y potencia producida en función de la velocidad del viento.

## 6 CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos muestran que a medida que aumenta la velocidad del viento, aumentan también la velocidad de rotación de régimen estacionario y la potencia producida, pero la segunda crece más rápidamente que la primera mostrando un fuerte carácter no-lineal proporcional al cubo de la velocidad del viento.

Con referencia a los desplazamientos se encontró que:

1. El desplazamiento de la torre hacia adelante y atrás depende principalmente de las cargas gravitacionales cuando la velocidad del viento es baja, pero a medida que ésta aumenta las cargas aerodinámicas se vuelven más y más relevantes. El desplazamiento medio hacia adelante disminuye con la velocidad del viento.
2. El movimiento de la torre de lado a lado depende esencialmente de las cargas aerodinámicas y de la tasa de potencia producida por el generador eléctrico. El desplazamiento medio lateral aumenta casi linealmente con la velocidad del viento.
3. El valor medio del desplazamiento de las palas en el sentido normal a la cuerda extrema depende principalmente de las cargas aerodinámicas, pero la amplitud de las vibraciones depende de las cargas gravitacionales.
4. El movimiento de las palas en el sentido tangencial a la cuerda extrema depende esencialmente de las cargas gravitacionales y no muestra cambios significantes a medida la velocidad del viento crece.

Aunque el modelo propuesto constituye un excelente punto de partida para obtener un entendimiento cabal del comportamiento aeroelástico de grandes turbinas eólicas de eje horizontal, en el futuro será necesario expandir las ideas aquí presentadas y agregar modelos de la dinámica de generación de potencia, de la dinámica de interconexión con la red eléctrica y/o de la dinámica asociada a la producción de hidrógeno basada en energía eólica.

## REFERENCIAS

- Baumgarte, J., Stabilization of constraints and integral of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1:1-16, 1972.
- Betsch, P., On the use of Euler parameters in multibody dynamics. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 6:85-86, 2006.
- Carnahan, B., Luther, H.A., and Wilkes, J.O., *Applied numerical methods*. John Wiley and Sons, 1969.
- Cook, R.D., Malkus, D. S., Plesha, M.E., and Witt, R.J., *Concepts and applications of finite element analysis*, 4<sup>th</sup> edition. Wiley, 2001.
- DNV-RISØ, *Guidelines for design of wind turbines*, 2<sup>nd</sup> edition. Det Norske Veritas and Risø National Laboratory, 2009.
- Gebhardt, C.G., Preidikman, S., and Massa, J.C., Numerical simulations of the aerodynamic behavior of large horizontal-axis wind turbines. *International Journal of Hydrogen Energy*, 35:6005-6011, 2010.
- Hodges, D.H., and Dowell, E. H., *Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades*, Technical Report TN D-7818. NASA, 1974.
- Holm-Jørgensen, K., Stærdahl, J.W., and Nielsen, S.R.K., On the nonlinear structural analysis of wind turbine blades using reduced degree of freedom models. *Structural Engineering and Mechanics*, 28:107-127, 2008.

- Jonkman, J.M., and Buhl, M.L. Jr., *FAST user's guide*, Technical Report NREL/EL-500-38230. NREL, 2005.
- Kallesøe, B.S., Equations of motion for a rotor blade, including gravity, pitch action and rotor speed variations. *Wind Energy*, 10:209-203, 2007.
- Kane, T.R., and Wang, C.F., On the derivation of equations of motion. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 13:487-492, 1965.
- Kane, T.R., Ryan, R.R., and Banerjee, A.K., Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. *Journal of Control and Guidance*, 10:139-151, 1987.
- Krenk, S., *Non linear modelling and analysis of structures and solids*, Notes. Technical University of Denmark, 2005.
- Krenk, S., *Non linear modelling and analysis of structures and solids*. Cambridge University Press, 2009.
- Lee, D.L., Hodges, D.H., and Patil, M.J., Multiflexible-body dynamic analysis of horizontal axis wind turbines. *Wind Energy*, 5:281-300, 2002.
- Maißer, P., Analytical dynamics of multi-body systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 91:1391-1396, 1991.
- Meirovitch, L., *Computational methods in structural dynamics*. Springer, 1980.
- Nikravesh, P. E., *Computer-aided analysis of mechanical systems*. Prentice Hall, 1988.
- Petersen, J.T., *Kinematically non-linear finite element model of a horizontal-axis wind turbine*, Ph.D. Thesis. Risø National Laboratory, 1990.
- Preidikman, S., Gebhardt, C., Brewer, A. and Rocca, B., Aeroservoelastic analysis of large horizontal-axis wind turbines: A new methodology, *11<sup>th</sup> Pan American Congress of Applied Mechanics, PACAM XI*, Foz do Iguaçu, Brazil, 2010.
- Preidikman, S., *Numerical simulations of interactions among aerodynamics, structural dynamics, and control systems*, PhD Thesis. Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998.
- Reddy, J.N., *An introduction to the finite element method*. McGraw-Hill, 1984.
- Shabana, A.A., *Dynamics of multibody systems*, 3<sup>rd</sup> edition. Cambridge University Press, 2010.
- Zhao, X., Maißer, P., and Wu, J., A new multibody modeling methodology for wind turbine structures using a cardanic joint beam element. *Renewable Energy*, 32:532-546, 2007.